ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2025
Α΄ ΦΑΣΗ

Ε_3.Μλ3ΘΟ(α)

ΤΑΞΗ: **Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Ημερομηνία: Τρίτη 7 Ιανουαρίου 2025
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελίδα 76 σχολικού βιβλίου (Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών)

Α2. Σελίδα 95 σχολικού βιβλίου (ΟΡΙΣΜΟΣ)

Α3. Ο ισχυρισμός **(γ)** είναι λάθος

Α4. **(α)** Σωστό **(β)** Σωστό **(γ)** Σωστό **(δ)** Λάθος **(ε)** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. $A_{h\circ g} = \{x \in A_g \text{ και } g(x) \in A_h\}$

$A_{h\circ g} = \{x \in \mathbb{R} \text{ και } e^x \le 1\}$

$A_{h\circ g} = \{x \in \mathbb{R} \text{ και } x \le 0\}$

Άρα $A_{h\circ g} = (-\infty, 0]$ και $(h\circ g)(x) = h(g(x)) = \sqrt{1-e^x}$

Β2. $f(x) = \sqrt{1-e^x}, x \le 0$

Έστω $x_1, x_2 \in (-\infty, 1]$ με $x_1 < x_2$ τότε

$e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow -e^{x_1} > -e^{x_2} \Leftrightarrow 1-e^{x_1} > 1-e^{x_2} \Leftrightarrow \sqrt{1-e^{x_1}} > \sqrt{1-e^{x_2}} \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $A=(-\infty,0]$ και συνεχής άρα το σύνολο τιμών της είναι $f(A)=\left[f(0), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right)=[0,1)$

Διότι $f(0)=\sqrt{1-e^0}=\sqrt{1-1}=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1-e^x}=1$ αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-e^x)=1-0=1$

Β3. Η f είναι γνησίως μονότονη άρα και 1-1 επομένως αντιστρέφεται .

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f . Άρα $A_{f^{-1}}=f(A)=[0,1)$

Για την εύρεση της f^{-1} θα λύσουμε την εξίσωση $f(x)=y$ ως προς x

$f(x)=y \Leftrightarrow \sqrt{1-e^x}=y \Leftrightarrow 1-e^x=y^2 \Leftrightarrow 1-y^2=e^x \Leftrightarrow x=\ln(1-y^2)$

Άρα $f^{-1}(x)=\ln(1-x^2),\ x\in[0,1)$

Β4. Για το $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[e^x\cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{e^x}\right)\right]$ έχουμε

$$\left|e^x\cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{e^x}\right)\right|=\left|e^x\right|\cdot\left|\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{e^x}\right)\right|\le\left|e^x\right|\cdot 1$$

Άρα $\left|e^x\cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{e^x}\right)\right|\le\left|e^x\right|$

Επομένως $-\left|e^x\right|\le e^x\cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{e^x}\right)\le\left|e^x\right|\Leftrightarrow -e^x\le e^x\cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{e^x}\right)\le e^x$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}(-e^x)=0$ άρα από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x\cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{e^x}\right)=0$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)-f(x)+f(x)}{h}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{f(x-h)-f(x)}{h}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{h}\right] \quad \textbf{(I)}$$

Ισχύει $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$

ενώ για το $\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{h}$

Θέτουμε $u=-h$ άρα $h=-u$, όταν $h\to 0$ τότε $u\to 0$ οπότε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{h}=\lim_{u\to 0}\frac{f(x+u)-f(x)}{-u}=-\lim_{u\to 0}\frac{f(x+u)-f(x)}{u}=-f'(x)$$

Άρα από την σχέση **(I)** έχουμε $\frac{1}{2}\left[f'(x)+f'(x)\right]=f'(x)$

Γ2. Έστω $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta, \alpha\neq 0$ η πολυωνυμική συνάρτηση $3^{ου}$ βαθμού

Αφού διέρχεται από την αρχή των αξόνων ισχύει $f(0)=0 \Leftrightarrow \delta=0$

Επομένως $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x$ και $f'(x)=3\alpha x^2+2\beta x+\gamma$

Ισχύει $f(x)+f'(x)=x^3+3x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα για $x=0$ προκύπτει

$f(0)+f'(0)=0 \Leftrightarrow f'(0)=0 \Leftrightarrow \gamma=0$

Οπότε $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2$ και $f'(x)=3\alpha x^2+2\beta x$

Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$$f(x)+f'(x)=x^3+3x^2 \Leftrightarrow \alpha x^3+\beta x^2+3\alpha x^2+2\beta x=x^3+3x^2$$

$$\Leftrightarrow \alpha x^3+(\beta+3\alpha)x^2+2\beta x=x^3+3x^2$$

Για να ισχύει η τελευταία σχέση για κάθε $x\in\mathbb{R}$ πρέπει

$$\begin{cases}\alpha=1\\ \beta+3\alpha=3\\ 2\beta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=1\\ \beta+3\alpha=3\\ \beta=0\end{cases}\Leftrightarrow \alpha=1 \text{ και } \beta=0 \text{ συνεπώς } f(x)=x^3 \text{ με } A_f=\mathbb{R}$$

Παρατήρηση: Η άσκηση μπορεί να λυθεί και χωρίς το δεδομένο ότι η f διέρχεται από την αρχή των αξόνων , ο λόγος που δόθηκε είναι για να είναι πιο απλό το σύστημα στην ισότητα των πολυωνύμων

Εναλακτική λύση

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$$f(x)+f'(x)=x^3+3x^2 \Leftrightarrow (\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta)+(3\alpha x^2+2\beta x+\gamma)=x^3+3x^2$$

$$\Leftrightarrow \alpha x^3+(\beta+3\alpha)x^2+(\gamma+2\beta)x+\gamma+\delta=x^3+3x^2$$

Για να ισχύει η τελευταία σχέση για κάθε $x\in\mathbb{R}$ πρέπει

$$\begin{cases}\alpha=1\\ \beta+3\alpha=3\\ \gamma+2\beta=0\\ \gamma+\delta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=0\\ \gamma=0\\ \delta=0\end{cases} \text{ άρα } f(x)=x^3 \text{ με } A_f=\mathbb{R}$$

Γ3. Ά τρόπος

(i) Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=2x^3+(x-1)^3,\ x\in\mathbb{R}$

Η h είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[0,1]$ ως πολυωνυμική

$h(0)=-1$ και $h(1)=2$ δηλαδή $h(0)\cdot h(1)<0$ άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0$

Θα αποδείξουμε ότι είναι μοναδικό.

Έστω $x_1,x_2\in[0,1]$ με $x_1<x_2$ τότε

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow 2x_1^3 < 2x_2^3 \ (1)$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \Rightarrow (x_1 - 1)^3 < (x_2 - 1)^3 \ (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) προκύπτει $h(x_1) < h(x_2)$ άρα η h είναι γνησίως αύξουσα επομένως και 1-1 άρα η ρίζα x_0 είναι μοναδική .

Β τρόπος

Η εξίσωση μπορεί να λυθεί και αλγεβρικά και να προσδιοριστεί η ρίζα απευθείας η οποία όπως φαίνεται παρακάτω ανήκει στο ανοικτό διάστημα $(0,1)$

$$2x^3 + (x-1)^3 = 0 \Leftrightarrow 2x^3 = (1-x)^3 \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{2}x\right)^3 = (1-x)^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{2}x = 1 - x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{2}x + x = 1 \Leftrightarrow x\left(\sqrt[3]{2} + 1\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{2} + 1}$$

ii) Θα λύσουμε την εξίσωση $f(x) = g(x), x \in \mathbb{R}^*$

$$x^3 = \frac{1}{3x} - \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3x^4 = 1 - 2x \Leftrightarrow 3x^4 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)\left(3x^3 - 3x^2 + 3x - 1\right) = 0$$

Από την τελευταία προκύπτει $x = -1$ και

$$3x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$2x^3 + (x-1)^3 = 0 \Leftrightarrow h(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$, η μοναδική ρίζα του ερωτήματος Γ3(i)

Εναλλακτικά

Σύμφωνα με τον Β τρόπο του ερωτήματος Γ3 (i) η εξίσωση έχει ρίζα την $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2} + 1}$

Η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 3x^2$ ενώ η g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με $g'(x) = -\frac{1}{3x^2}$

Έχουμε

$$f'(-1) = 3 \text{ και } g'(-1) = -\frac{1}{3} \text{ δηλαδή } f'(-1) \cdot g'(-1) = -1$$

$f'(x_0)=3{x_0}^2$ και $g'(x_0)=-\dfrac{1}{3{x_0}^2}$ δηλαδή $f'(x_0)\cdot g'(x_0)=-1$

Άρα οι εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων f και g στα κοινά τους σημεία τέμνονται κάθετα.

Γ4 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^3+1}{x^{\nu-1}}\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x^3}\right]=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^3+1}{x^{\nu-1}}\cdot\dfrac{x^3}{x^3}\eta\mu\dfrac{1}{x^3}\right]=1$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3+1}{x^{\nu+2}}\cdot\left(x^3\cdot\eta\mu\frac{1}{x^3}\right)\right]=1 \quad \textbf{(I)}$$

Για το $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x^3}$ θέτουμε $u=\dfrac{1}{x^3}$ άρα $x^3=\dfrac{1}{u}$

Έχουμε $u_0=\lim\limits_{x\to+\infty}u=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^3}=0^+$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x^3}=\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1$

Για το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+1}{x^{\nu+2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^{\nu+2}}=$ έχουμε τις εξής περιπτώσεις

- Αν $3>\nu+2\Leftrightarrow\nu<1$ Άτοπο αφού $\nu\in\mathbb{N}^*$
- Αν $3=\nu+2\Leftrightarrow\nu=1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+1}{x^{1+2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^3}=1$ δεκτή διότι τότε ισχύει **(I)**
- Αν $3<\nu+2\Leftrightarrow\nu>1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^{\nu+2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^{\nu-1}}=0$ Άτοπο αφού τότε το όριο είναι 0.

ΘΕΜΑ 4

Δ1.

(i) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με $g'(x)=6x^2+6x-6f(0)\cdot f(1)$ και αφού δεν έχει οριζόντια εφαπτομένη ισχύει $g'(x)\neq0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα $6x^2+6x-6f(0)\cdot f(1)\neq0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Για να ισχύει πρέπει $\Delta<0$

Δηλαδή : $36+4\cdot6\cdot6\cdot f(0)\cdot f(1)<0\Leftrightarrow 6\big(1+4f(0)\cdot f(1)\big)<0\Leftrightarrow 1+4f(0)\cdot f(1)<0$

(ii) Για την f πρέπει $x^2+x-f(0)\cdot f(1)\neq 0$ το οποίο ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ αφού η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $1+4f(0)\cdot f(1)<0$ άρα $A_f=\mathbb{R}$

Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

Ισχύει $1+4f(0)\cdot f(1)<0\Leftrightarrow f(0)\cdot f(1)<-\dfrac{1}{4}$ άρα $f(0)\cdot f(1)<0$

Επομένως από Θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$

Δ2. Για να βρούμε το κοινό τους σημείο θα λύσουμε την εξίσωση

$$f_1(x)=f_2(x),x\in(0,+\infty)$$

Έχουμε $e^x=\dfrac{\alpha}{x}$ $,x>0$

Από το **Δ1** ισχύει $f(x_0)=0$ με $x_0\in(0,1)$

Άρα $\dfrac{x_0e^{x_0}-\alpha}{{x_0}^2+x_0-f(1)f(0)}=0\Leftrightarrow x_0e^{x_0}-\alpha=0\Leftrightarrow x_0e^{x_0}=\alpha\Leftrightarrow e^{x_0}=\dfrac{\alpha}{x_0}$

Άρα οι συναρτήσεις $f_1(x),f_2(x)$ έχουν κοινό σημείο το $M\left(x_0,e^{x_0}\right)$ ή $M\left(x_0,\dfrac{\alpha}{x_0}\right)$

Θα αποδείξουμε ότι είναι μοναδικό

Έστω $h(x)=e^x-\dfrac{\alpha}{x},x>0$

Για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ έχουμε

- $x_1<x_2\Rightarrow\boxed{e^{x_1}<e^{x_2}}$ **(1)**
- $x_1<x_2\overset{x_1\cdot x_2>0}{\Rightarrow}\dfrac{1}{x_1}>\dfrac{1}{x_2}\overset{\alpha>0}{\Rightarrow}\boxed{-\dfrac{\alpha}{x_1}<-\dfrac{\alpha}{x_2}}$ **(2)**

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) προκύπτει $h(x_1)<h(x_2)$ άρα η h γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ οπότε και 1-1 άρα η ρίζα x_0 είναι μοναδική .

Η κλίση της f_1 στο σημείο M είναι $f_1'(x_0)=e^{x_0}$

Ενώ η κλίση της f_2 στο σημείο M είναι $f_2'(x_0)=-\dfrac{\alpha}{{x_0}^2}$

Ισχύει $f_1'(x_0)=e^{x_0}>0$ ενώ $f_2'(x_0)=-\dfrac{\alpha}{{x_0}^2}<0$ άρα **δεν** έχουν κοινή εφαπτομένη στο M.

Δ3. Για το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{g(x)}-\alpha^{g(x)}}{e^{g(x)}+\alpha^{g(x)}}$. Θέτουμε $u=g(x)$

$$u_0=\lim_{x\to+\infty}u=\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(2x^3+3x^2-6f(0)\cdot f(1)x\right)=\lim_{x\to+\infty}2x^3=+\infty$$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{g(x)}-\alpha^{g(x)}}{e^{g(x)}+\alpha^{g(x)}}=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{e^u-\alpha^u}{e^u+\alpha^u}$, γνωρίζουμε ότι $\alpha<e$ άρα

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{e^u-\alpha^u}{e^u+\alpha^u}=\lim_{u\to+\infty}\frac{1-\left(\frac{\alpha}{e}\right)^u}{1+\left(\frac{\alpha}{e}\right)^u}=\frac{1-0}{1+0}=1 \quad \text{αφού } \lim_{u\to+\infty}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^u=0,\quad 0<\frac{\alpha}{e}<1$$

Δ4. Ισχύει $g(0)=0$ και $g(1)=5-6f(0)f(1)$ το οποίο είναι θετικό διότι

$$f(0)\cdot f(1)<-\frac{1}{4}\Leftrightarrow -6f(0)\cdot f(1)>\frac{3}{2}\Leftrightarrow 5-6f(0)\cdot f(1)>\frac{13}{2}$$

Άρα $0<1$ και $g(0)<g(1)$ οπότε με δεδομένο ότι η g είναι γνησίως μονότονη συμπεραίνουμε ότι είναι γνησίως αύξουσα.

$$g(f(x))>0\Leftrightarrow g(f(x))>g(0)\overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x)>0\Leftrightarrow\frac{xe^x-\alpha}{x^2+x-f(0)\cdot f(1)}>0$$

Το τριώνυμο $x^2+x-f(0)\cdot f(1)$ παίρνει μόνο θετικές τιμές διότι έχει διακρίνουσα αρνητική και ο συντελεστής του x^2 είναι θετικός άρα ο αριθμητής πρέπει να είναι θετικός $xe^x-\alpha>0\Leftrightarrow h(x)>h(x_0)\Leftrightarrow x>x_0$

Προφανώς μπορούμε να αποδείξουμε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα και με άλλους τρόπους.